

УДК 551.551

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СТАТИСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ДИНАМИКИ НАПРАВЛЕНИЯ ВЕТРА

Е.В. Капля

Филиал НИУ «МЭИ» в г. Волжском
404110 г. Волжский, Волгоградская обл., пр. Ленина, д. 69
Тел.: (8443) 210160, e-mail: ev-kaple@yandex.ru

Заключение совета рецензентов: 03.09.15 Заключение совета экспертов: 06.09.15 Принято к публикации: 09.09.15

Установлена статистическая закономерность в хаотической динамике направления ветра. Выполнена аппроксимация плотности распределения приращения угла направления ветра путем обобщения логистического закона. Параметры аппроксимационной функции вычислены по экспериментальным данным на основе метода наименьших квадратов. Согласие предложенной функции с метеорологическими данными проверено с помощью критериев согласия Пирсона и Колмогорова.

Ключевые слова: направление ветра, приращение угла направления ветра, плотность вероятности, логистическое распределение, аппроксимационная функция, ветроэнергетическая установка.

THE PARAMETRIC GENERALIZATION OF THE LOGISTIC DISTRIBUTION IN THE STATISTICAL ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF WIND DIRECTION

E.V. Kaplya

Volzhsy Branch of the National Research University
«Moscow Power Engineering Institute»
69 Lenin str., Volzhsky, Volgograd reg., 404110, Russia
Tel.: (8443) 210160, e-mail: ev-kaple@yandex.ru

Referred: 03.09.15 Expertise: 06.09.15 Accepted: 09.09.15

Found the statistical regularity in the chaotic dynamics of the wind direction. Made approximation of the density distribution of the increment of the angle of wind direction by generalization of the logistic distribution. The parameters of the approximating function is computed from the experimental data based on the method of least squares. The proposed consent of the approximating function with meteorological data tested using the goodness-of-fit Pearson and Kolmogorov tests.

Keywords: wind direction, increment angle wind direction, probability density, logistic distribution, approximation function, wind power plant.



Егор Викторович
Капля
Egor V. Kaplya

Сведения об авторе: канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Автоматизация технологических процессов и производств» ВФ МЭИ, ведущий научный сотрудник лаборатории диагностики и прогнозирования.

Образование: Волгоградский государственный технический университет (2000).

Область научных интересов: энергетика, автоматизация.

Публикации: 62.

Information about the author: candidate of physical and mathematical sciences, docent faculty «Automation of technological processes and productions» of the Volzhsky branch of Moscow power institute, leading researcher in laboratory of diagnostics and prediction of the Volzhsky branch of Moscow power institute.

Education: Volgograd State Technical University (2000).

Research area: power engineering, automation.

Publications: 62.

Введение

Порывистость и завихренность воздушных потоков влияет на стабильность производительности ветроэнергетических установок (ВЭУ). Современные промышленные ВЭУ имеют автоматическую систему ориентации ветроколеса [1, 2]. Система ориентации не должна реагировать на кратковременные изменения направления ветра. С целью оптимизации энергетических затрат на повороты ВЭУ необходима настройка чувствительности системы ориентации. Настройка системы ориентации возможна на основе измеренных и вычисленных динамических характеристик воздушных потоков в месте расположения ВЭУ.

При моделировании переходных процессов и процессов управления приводами ВЭУ целесообразно учитывать изменения направления воздушного потока [3]. Статистический анализ приращений угла направления ветра позволяет выявить закономерности в динамике направления ветра.

Цели исследования:

1. Аппроксимация плотности распределения приращения угла направления ветра.
2. Проверка согласия предложенного гипотетического закона распределения с экспериментальными данными.

Динамика направления воздушного потока

При имитационном моделировании переходных процессов ВЭУ целесообразно использовать дискретную математическую модель воздушного потока, которая содержит угол ориентации вектора усредненной мгновенной скорости воздушного потока γ_q в момент времени $t_q = q\Delta t + t_0$, где q – номер дискретного момента времени; t_0 – начальный момент времени; Δt – величина приращения времени.

Эволюция направления воздушного потока в заданной точке пространства задается рекуррентной формулой: $\gamma_{q+1} = \gamma_q + \Delta\gamma_q$. Величины приращений $\Delta\gamma_q$ образуют случайную временную последовательность. Вероятностные характеристики и свойства последовательности приращений угла $\Delta\gamma_q$ зависят от соответствующей выбранной величины Δt . Выявление свойств указанной последовательности возможно на основе статистического и корреляционного анализа экспериментальных данных.

Описание массива экспериментальных данных

Экспериментальные данные получены на метеостанции ВФ МЭИ в г. Волжском Волгоградской обл. Метеостанция содержит ультразвуковой анемометр WXT-520 фирмы Vaisala [4]. Ультразвуковые датчики направления и скорости ветра не обладают инерционными свойствами в отличие от электромеханических датчиков с пропеллером. Это преимущество

позволяет использовать ультразвуковые датчики для измерений быстроизменяющихся характеристик воздушного потока.

Результаты измерений угла γ направления ветра сохранены метеостанцией после округления до целых чисел в диапазоне $1^\circ, 2^\circ, \dots, 360^\circ$. Период опроса датчика равен $\Delta t = 3$ с. Каждому измерению угла γ и скорости ветра v сопоставим номер измерения S .

Нулевой угол γ имеет вектор скорости ветра, направленный с севера на юг. Положительное приращение угла $\Delta\gamma$ соответствует повороту вектора мгновенной скорости ветра $\vec{v}$ по часовой стрелке на угол, не превышающий 180° . Отрицательное приращение $\Delta\gamma$ соответствует повороту вектора $\vec{v}$ против часовой стрелки (рис. 1).

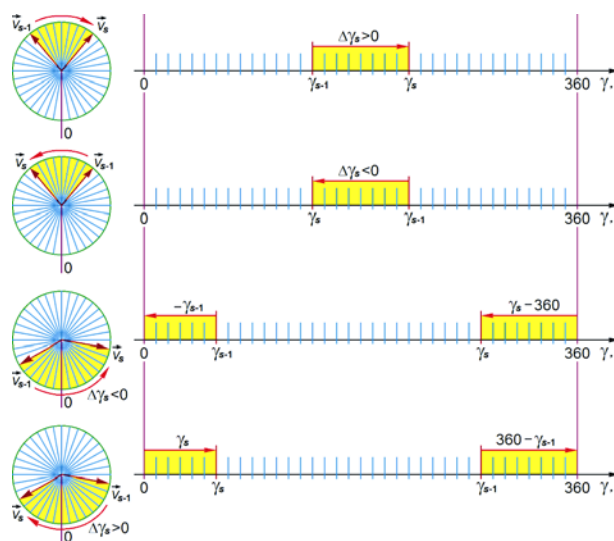


Рис. 1. Схема возможных изменений угла направления ветра: слева – направления векторов мгновенной скорости ветра; справа – развертка секторов, соответствующих приращениям угла направления ветра

Fig. 1. Scheme of possible changes in the angle of the wind direction: on the left – direction vectors of the instantaneous wind speed; right – scan sectors corresponding to the increments of the angle of wind direction

Величину приращения $\Delta\gamma$ угла направления ветра имеет смысл рассматривать в полуинтервале $\Delta\gamma \in (-180^\circ; +180^\circ]$. Границы области определения измеренного угла γ замкнуты, поэтому величина $\Delta\gamma$ определяется выражением

$$\Delta\gamma_s = \begin{cases} \gamma_s - \gamma_{s-1}, & \text{если } |\gamma_s - \gamma_{s-1}| \leq \vartheta, \\ \gamma_s - \gamma_{s-1} - 2\vartheta, & \text{при } -\vartheta < (\gamma_s - \gamma_{s-1} - 2\vartheta) < 0, \\ \gamma_s - \gamma_{s-1} + 2\vartheta, & \text{при } 0 < (\gamma_s - \gamma_{s-1} + 2\vartheta) < \vartheta, \end{cases}$$

где S – номер измерения угла; $\vartheta = 180^\circ$.

Величина $\Delta\gamma_s$ принимает целые значения в диапазоне $1 - \vartheta \leq \Delta\gamma_s \leq \vartheta$. Допустимые значения $\Delta\gamma$ пронумеруем: $\Delta\gamma_i = i - \vartheta$, где $i = 1, 2, \dots, M$; $M = 360$.

Эмпирическая функция плотности распределения $\Delta\gamma$ равна отношению $f_e(i, T) = n(i, T)/N(T)$, где T – продолжительность измерений; $N(T)$ – объем анализируемой экспериментальной выборки.

Величина $N(T)$ равна сумме $N(T) = \sum_{i=1}^M n(i, T)$, где $n(i, T)$ – количество экспериментальных значений $\Delta\gamma_i$, равных $\Delta\gamma_i$.

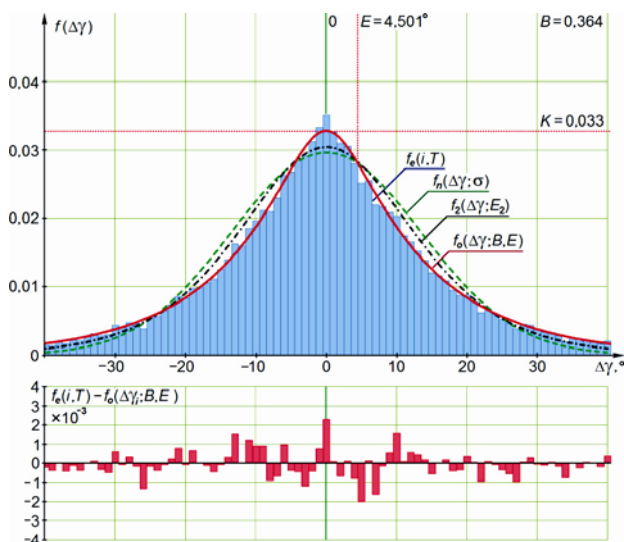


Рис. 2. Плотность распределения вероятности $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ приращения угла направления ветра и нормированная гистограмма $f_e(i, T)$, построенная по суточной выборке 10 марта 2014

Fig. 2. The density of the probability distribution $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ of the increment angle of wind direction and normalized histogram $f_e(i, T)$, constructed by daily sampling March 10, 2014

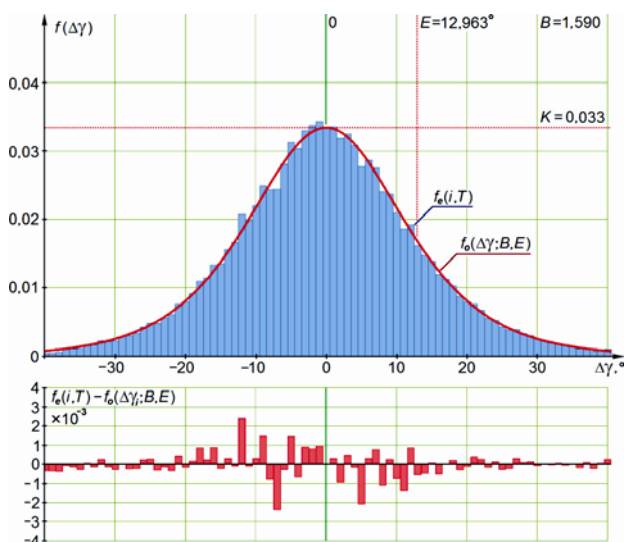


Рис. 3. Плотность распределения вероятности $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ приращения угла направления ветра и нормированная гистограмма $f_e(i, T)$, построенная по суточной выборке 18 марта 2014

Fig. 3. The density of the probability distribution $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ of the increment angle of wind direction and normalized histogram $f_e(i, T)$, constructed by daily sampling March 18, 2014

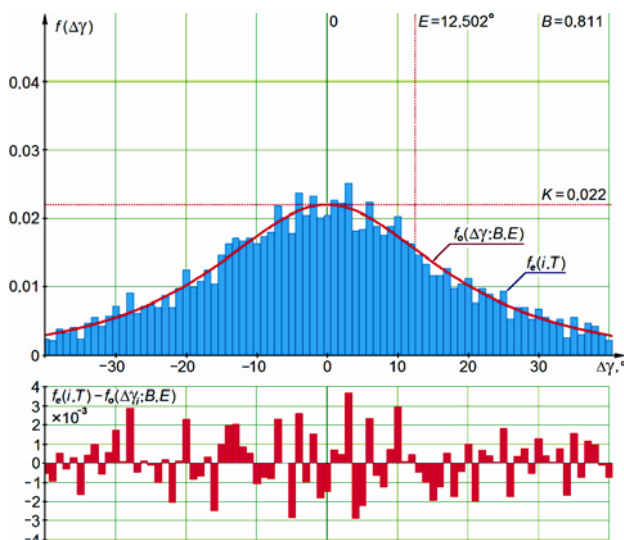


Рис. 4. Плотность распределения вероятности $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ приращения угла направления ветра и нормированная гистограмма $f_e(i, T)$, построенная по 4-часовой выборке 00-04 часа 10 марта 2014

Fig. 4. The density of the probability distribution $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ of the increment angle of wind direction and normalized histogram $f_e(i, T)$, constructed by the 4-hour sample 00-04 hours on March 10, 2014

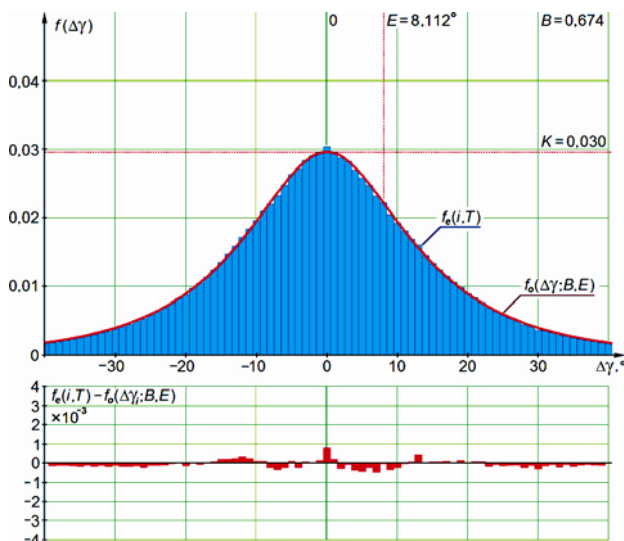


Рис. 5. Плотность распределения вероятности $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ приращения угла направления ветра и нормированная гистограмма $f_e(i, T)$, построенная по месячной выборке марта 2014

Fig. 5. The density of the probability distribution $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ of the increment angle of wind direction and normalized histogram $f_e(i, T)$, constructed by monthly sampling March 2014

Результаты расчета эмпирической плотности распределения вероятности приращения угла направления ветра за интервал времени $\Delta t = 3$ с представлены на рис. 2-5 столбчатыми гистограммами. Форма экспериментальных гистограмм близка к симметричной. Аналогичные гистограммы получены иностранными исследователями [5] в других районах Земли.

Коэффициент эксцесса плотности распределения

Количественная характеристика островершинности эмпирической функции плотности распределения – выборочный коэффициент эксцесса (ВКЭ), который вычисляют по формуле [6]

$$\Lambda_x = \frac{\left[\frac{1}{N(T)} \sum_{k=1}^{N(T)} (x_k - \bar{x})^4 \right]}{\left[\frac{1}{N(T)} \sum_{k=1}^{N(T)} (x_k - \bar{x})^2 \right]^2} - 3.$$

Примем в качестве x приращение угла $\Delta\gamma$. ВКЭ, найденный по месячным выборкам приращения угла направления ветра, принадлежит отрезку от 10 до 13. ВКЭ, вычисленный на основе суточных выборок, варьируется в пределах от 4 до 22. ВКЭ, найденный по 4-часовым выборкам приращения угла направления ветра, принадлежит отрезку от 1 до 57. Значения ВКЭ не зависят от времени года и могут существенно меняться в течение суток.

Нормальное распределение имеет нулевой эксцесс, поэтому аппроксимация эмпирической плотности распределения приращения угла направления ветра нормальным законом некорректна. Аппроксимацию эмпирической плотности распределения приращения угла направления ветра целесообразно осуществлять на основе функции с варьируемым коэффициентом эксцесса.

Аппроксимация плотности распределения

Эмпирические плотности распределения приращения угла направления ветра аппроксимируем функцией

$$f(\Delta\gamma; B, E) = K \left[\operatorname{sech}(\Delta\gamma/E) \right]^B, \quad (1)$$

где K – нормировочный коэффициент; E – угловой параметр; B – безразмерный степенной параметр.

Параметр E имеет размерность угла (размерность величины $\Delta\gamma$); коэффициент K обладает обратной размерностью.

Из условия нормировки плотности распределения следует равенство

$$\int_{-\vartheta}^{+\vartheta} K \left[\operatorname{sech}(\Delta\gamma/E) \right]^B d(\Delta\gamma) = 1. \quad (2)$$

Выразив нормировочный коэффициент K из (2), можно привести (1) к двухпараметрическому виду:

$$f_o(\Delta\gamma; B, E) = \frac{\left[\operatorname{sech}(\Delta\gamma/E) \right]^B}{\int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \left[\operatorname{sech}(\Delta\gamma/E) \right]^B d(\Delta\gamma)}. \quad (3)$$

Функции (1) и (3) обладают симметрией и нулевым математическим ожиданием. Коэффициент экс-

цесса функции (3) зависит от параметров B и E . Наличие двух независимых параметров обуславливает вариабельность формы плотности распределения (3). Диапазон значений коэффициента эксцесса, обеспечиваемый (3), достаточен для качественной аппроксимации экспериментальных данных.

Величины B и E целесообразно определять методом наименьших квадратов в результате минимизации целевой функции $R(B, E)$:

$$R(B, E) = \sum_{i=1}^M \left[f_e(i, T) - f_o(\Delta\gamma_i; B, E) \right]^2. \quad (4)$$

Значения параметров аппроксимационной функции (3) зависят от периода дискретизации времени Δt и продолжительности T измерений. Для выборок объемом $N = 4800$ (что соответствует $T = 4$ ч при $\Delta t = 3$ с) величины B и E характеризуются диапазонами: $0,010 \leq B \leq 1,920$, $0,088^\circ \leq E \leq 20,129^\circ$. Значения параметров, вычисленные по месячным выборкам, принадлежат более узким отрезкам: $0,53 \leq B \leq 0,67$, $6,16^\circ \leq E \leq 8,12^\circ$.

На основе (3) и найденных значений параметров B и E построены непрерывные статистические распределения плотности вероятности $\Delta\gamma$. Сплошными линиями на рис. 2-5 показаны теоретические плотности распределения $f_o(\Delta\gamma; B, E)$.

Абсолютные отклонения $f_o(\Delta\gamma; B, E)$ от $f_e(i, T)$ представлены на рис. 2-5 столбчатыми диаграммами в нижней части рисунков. Увеличение объема выборки приводит к уменьшению отклонений теоретических распределений от эмпирических, что подтверждает статистическую устойчивость аппроксимации.

На рис. 2 показаны три распределения вероятности: $f_o(\Delta\gamma; B, E)$ – предлагаемый закон распределения; $f_2(\Delta\gamma; E_2)$ – логистический закон распределения; $f_n(\Delta\gamma; \sigma)$ – нормальный закон распределения. Параметры этих распределений найдены методом наименьших квадратов в результате минимизации целевых функций, аналогичных (4). Предлагаемый закон распределения $f_o(\Delta\gamma; B, E)$ имеет минимальное отклонение от нормированной экспериментальной гистограммы $f_e(i, T)$.

Частные случаи аппроксимационной функции

Когда $B = 1$ и $\vartheta = \infty$, (3) приводится к виду

$$f_1(\Delta\gamma; E) = \frac{1}{\pi|E|} \operatorname{sech}(\Delta\gamma/E). \quad (5)$$

Когда $B = 2$ и $\vartheta = \infty$, (3) соответствует логистическому распределению [7] с нулевым математическим ожиданием:

$$f_2(\Delta\gamma; E) = \frac{1}{2|E|} \operatorname{sech}^2(\Delta\gamma/E). \quad (6)$$

Распределения, заданные (5) и (6), характеризуются постоянным коэффициентом эксцесса. В частности, коэффициент эксцесса логистического распределения равен 1,2. Следовательно, (5) и (6) не являются универсальным описанием распределения плотности вероятности приращения угла направления ветра.

Проверка согласия гипотетического закона распределения с экспериментальными данными

Проверка гипотез о согласии гипотетических законов распределения с экспериментальными данными выполнена на основе критерия Пирсона и критерия Колмогорова.

Статистика критерия Пирсона определяется формулой [8]:

$$G(T) = N(T) \sum_{i=1}^M \frac{[f_e(i, T) - P(i, T)]^2}{P(i, T)},$$

где $N(T)$ – количество учитываемых экспериментальных значений $\Delta\gamma$; $P(i, T)$ – теоретическая вероятность попадания в интервал с номером i .

Величина $P(i, T)$ определяется интегралом

$$P(i, T) = \int_{\Delta\gamma_i - \delta/2}^{\Delta\gamma_i + \delta/2} f_o[\Delta\gamma; B(T), E(T)] d(\Delta\gamma),$$

где δ – ширина каждого интервала; $\delta = 1^\circ$; $\Delta\gamma_i$ – середина i -го интервала градации величины $\Delta\gamma$.

Критическое значение $\tilde{G}$ статистики критерия Пирсона равно квантили $q\chi^2(\tilde{p}, \nu)$ распределения хи-квадрат с доверительной вероятностью $\tilde{p}$ и числом степеней свободы ν , где $\nu = M - r - 1$, $\tilde{p} = 1 - \alpha$; α – уровень значимости критерия; r – число оцениваемых параметров распределения.

Гипотеза о согласии аппроксимационной функции с экспериментальными данными считается подтвержденной, если выполняется условие

$$G(T) < \tilde{G}. \quad (7)$$

Статистика критерия Колмогорова определяется формулой [8]

$$G(T) = \sqrt{N(T)} \sup_{\Delta\gamma_i} |F_e(\Delta\gamma_i, T) - F_0(\Delta\gamma_i; B(T), E(T))|,$$

где $F_e(\cdot)$ – эмпирическая функция распределения $\Delta\gamma$, построенная по экспериментальным данным; $F_0(\cdot)$ – теоретическая функция распределения.

Критическое значение $\tilde{G}$ статистики критерия Колмогорова равно квантили распределения Стьюдента [8] с доверительной вероятностью $\tilde{p}$ и числом степеней свободы ν . Проверяемая гипотеза считается подтвержденной, если выполняется условие, аналогичное (7).

Уровень значимости критериев согласия задан равным $\alpha = 0,05$, что соответствует доверительной вероятности $\tilde{p} = 95\%$.

Гипотезы о согласии стандартных законов распределения (нормального и логистического) с экспериментальными гистограммами на основе критериев согласия Пирсона и Колмогорова не подтвердились.

Согласие экспериментальных 4-часовых выборок с предложенной формулой (3) подтверждается критериями согласия Пирсона и Колмогорова с указанной доверительной вероятностью при $T = 4$ ч и $\Delta t = 3$ с. Условие (7) выполняется для всех исследованных экспериментальных выборок продолжительностью не более 4 часов и для малой части суточных выборок при $\Delta t = 3$ с, что подтверждает гипотезу о согласии экспериментальных данных с предложенной статистической формулой (3) для выборок продолжительностью в несколько часов. Значения статистики для 4-часовой выборки (00-04 часа 10 марта 2014 г.) приведены в таблице.

Экспериментальные и критические значения
статистики
Experimental and critical values of statistics

Критерий согласия	$G(T = 4 \text{ ч})$	$\tilde{G}$
Пирсона	188,68	210,13
Колмогорова	1,334	1,653

Теоретические распределения плотности вероятности, полученные на основе (3), визуально соответствуют (рис. 5) экспериментальным гистограммам, построенным на основе месячных выборок, однако гипотеза о согласии (3) с месячными выборками не подтверждается на основе критериев согласия Пирсона и Колмогорова. Гипотеза о согласии не подтверждается на основе указанных критериев и для большинства суточных выборок.

Анализ результатов на основе теории турбулентности

Теория турбулентности Колмогорова [9, 10] предполагает наличие процесса каскадного дробления крупных вихрей. Энергетический спектр, построенный в [11] на основе экспериментальных наблюдений, имеет два максимума. В спектре пульсаций скорости воздушных потоков существует «провал», который разделяет мелкомасштабные и мезомасштабные движения воздушных потоков [11]. Частотный диапазон «провала» соответствует промежуткам времени порядка 1 часа.

Гипотеза о согласии плотности распределения экспериментальных данных с (3) подтверждается на основе критериев согласия для выборок продолжительностью до нескольких часов, т.е. для мелкомасштабных вихрей.

Дрейф значений параметров закона распределения (3) обусловлен мезомасштабными движениями воздушных потоков в атмосфере. Циклоны и другие мезомасштабные вихревые структуры вызывают изменение параметров функции (3) во времени.

Адаптивная система управления ВЭУ может периодически вычислять значения параметров B и E по часовым выборкам угла направления ветра и использовать найденные значения параметров в корректировке чувствительности системы ориентации ветроколеса.

Заключение

Идентифицирована формула, соответствующая закону распределения вероятности приращения угла направления ветра за равные промежутки времени. Идентификация формулы выполнена по экспериментальным выборкам углов направления ветра.

Плотность распределения вероятности приращения угла направления ветра можно аппроксимировать функцией

$$f_0(\Delta\gamma; B, E) = \frac{[\operatorname{sech}(\Delta\gamma/E)]^B}{\int_{-\theta}^{+\theta} [\operatorname{sech}(\Delta\gamma/E)]^B d(\Delta\gamma)}.$$

Предложенная формула получена в результате обобщения логистического закона распределения путем введения дополнительного степенного параметра B . Параметры аппроксимационной функции вычислены по экспериментальным данным на основе метода наименьших квадратов. Соответствие полученной аппроксимационной функции метеорологическим данным подтверждается с помощью критериев согласия Пирсона и Колмогорова для выборок продолжительностью до нескольких часов.

Список литературы

1. Gasch R., Twele J. Wind power plants: Fundamentals, design, construction and operation, 2 ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
2. Hansen M.O.L. Aerodynamics of wind turbines. 2nd ed., Earthscan, 2008.
3. Капля Е.В. Математическая модель переходных процессов поворотно-лопастной ветроэнергетической установки // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 12. С. 33-43.
4. Vaisala weather transmitter WXT520. Helsinki: Vaisala, 2010.
5. Mahrt L. Surface wind direction variability // Journal of applied meteorology and climatology. 2011. Vol. 50. P. 144-152.
6. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справ. изд. М.: Финансы и статистика, 1983.
7. Balakrishnan N. Handbook of the logistic distribution. New York: Marcel Dekker, 1992.
8. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М.: Высш. шк., 1984.
9. Birnir B. The Kolmogorov-Obukhov theory of turbulence. A mathematical theory of turbulence. Springer, 2013.
10. Durbin P.A., Pettersson-Reif B.A. Statistical theory and modeling for turbulent flows. 2nd ed., John Wiley & Sons, Ltd., 2011.
11. Simiu E., Scanlan R.H. Wind effects on structures: fundamentals and applications to design. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 1996.

References

1. Gasch R., Twele J. Wind power plants: Fundamentals, design, construction and operation, 2 ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
2. Hansen M.O.L. Aerodynamics of wind turbines. 2nd ed., Earthscan, 2008.
3. Kaplâ E.V. Matematičeskaâ model' perehodnyh processov povorotno-lopastnoj vetroënergetičeskoj ustanovki // Matematičeskoe modelirovanie. 2013. T. 25, № 12. S. 33-43.
4. Vaisala weather transmitter WXT520. Helsinki: Vaisala, 2010.
5. Mahrt L. Surface wind direction variability // Journal of applied meteorology and climatology. 2011. Vol. 50. P. 144-152.
6. Ajvazân S.A., Enûkov I.S., Mešalkin L.D. Prikladnaâ statistika: Osnovy modelirovaniâ i pervičnaâ obrabotka dannyh. Sprav. izd. M.: Finansy i statistika, 1983.
7. Balakrishnan N. Handbook of the logistic distribution. New York: Marcel Dekker, 1992.
8. Ivčenko G.I., Medvedev Ū.I. Matematičeskaâ statistika. M.: Vysš.šk., 1984.
9. Birnir B. The Kolmogorov-Obukhov theory of turbulence. A mathematical theory of turbulence. Springer, 2013.
10. Durbin P.A., Pettersson-Reif B.A. Statistical theory and modeling for turbulent flows. 2nd ed., John Wiley & Sons, Ltd., 2011.
11. Simiu E., Scanlan R.H. Wind effects on structures: fundamentals and applications to design. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 1996.

Транслитерация по ISO 9:1995

