К ВОПРОСУ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР В СТЕНКЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

А.В. Машков

Филиал НИУ «МЭИ» в г. Волжском
404110 г. Волжский, Волгоградская обл., пр. Ленина, д. 69
Тел.: (8443) 210160, факс: (8443) 210166, e-mail: vfmei@vfmei.ru

Заключение совета рецензентов: 03.09.15 Заключение совета экспертов: 06.09.15 Принято к публикации: 09.09.15

Предложена расчетная схема построения приближенных решений стационарного двумерного уравнения теплопроводности без внутренних источников тепла вариационными методами для эллиптической трубы постоянной толщины. При построении и решении уравнения теплопроводности в стенке эллиптического цилиндра используется криволинейная система координат специального вида, учитывающая геометрию сечения. В качестве иллюстрации рассмотрены два примера решения краевой задачи при граничных условиях первого рода в виде заданных функций и в виде постоянных значений температуры.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, эллиптическая труба, вариационные методы.

TO A QUESTION OF APPROXIMATE CALCULATIONS OF A STATIONARY FIELD OF TEMPERATURES IN A WALL OF THE ELLIPTIC CYLINDER OF EQUAL THICKNESS BY A VARIATIONS METHOD

A.V. Mashkov

Volzhsky Branch of the National Research University «Moscow Power Engineering Institute»
69 Lenin str., Volzhsky, Volgograd reg., 404110, Russia
Tel.: (8443) 210160, fax: (8443) 210166, e-mail: vfmei@vfmei.ru

Referred: 03.09.15 Expertise: 06.09.15 Accepted: 09.09.15

The calculation scheme of creation of approximate solutions of the stationary two-dimensional equation of heat conductivity without internal sources of heat by variation methods for an elliptic pipe of constant thickness is offered.

At creation of the equation of heat conductivity in a wall of the elliptic cylinder the curvilinear system of coordinates of a special type considering geometry of section is used. As an example, two examples of the solution of a border task are reviewed under boundary conditions of the first sort in the form of the set functions and in the form of constant values of temperature.

Keywords: equation of heat conductivity, an elliptic pipe, variation methods.

Александр Васильевич
Машков
Alexander V. Mashkov

Сведения об авторе: канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры «Теплоэнергетика и теплотехника» ВФ МЭИ.

Образование: Саратовский госуниверситет (1972).

Область научных интересов: нелинейная теория упругости высокоэластических материалов, теория теплопроводности в твердых телах, методы математической статистики в моделировании процессов теплоэнергетики.

Публикации: более 60.

Information about author: Ph.D. (Tech.), associate professor, professor of the Department of «Heat power engineering and heat engineering» Volzhsky Branch of the Moscow Power Engineering Institute.

Education: Saratov State University (1972).

Research area: nonlinear elasticity highly elastic materials, the theory of heat conduction in solids, statistical methods in modeling of the processes of heat and power engineering.

Publications: more than 60.

Введение

В настоящей работе предложен вариант приближенного расчета стационарного поля температур в стенке трубы эллиптического сечения равной толщины вариационным методом с использованием специальной криволинейной системы координат.

В технике наряду с цилиндрическими трубами в ряде случаев используются трубы эллиптического сечения. Расчет поля температур в стенке эллиптического цилиндра представляет собой самостоятельную, существенно двумерную задачу, решение которой не может быть получено на основании известных решений для кругового цилиндра. Одним из вариантов технологии изготовления труб эллиптического сечения является метод прокатки на оправке эллиптического сечения. При такой технологии толщина стенки трубы $S = \text{const}$ по периметру постоянна, а внутренняя поверхность трубы представляет собой эллиптический цилиндр с полуосями a и b ($a > b$). Длина L эллиптической трубы предполагается значительно большей, чем большая полуось эллипса $L \gg a$. В силу предположения о стационарности задачи и условия $L \gg a$ задача расчета поля температур в стенке эллиптического цилиндра рассматривается как плоская. При этом элемент объема, элемент поверхности и другие характеристики рассчитываются на единицу длины трубы. Внутренние источники тепла в стенке трубы отсутствуют.

Анализ

Решение для толстостенной эллиптической трубы равной толщины строится с использованием специального вида системы координат и вариационных методов решения полученного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

Рис. 1. Расчетная схема сечения эллиптической трубы. (φ, s) криволинейная система координат.

Вектор-радиусы точек M_0 и P : $\vec{r}_0 = \vec{OM}_0$; $\vec{r} = \vec{OP}$

Fig. 1. Design scheme of elliptical cross section of the pipe. (φ, s) curvilinear coordinate system.

Vector-points and radii: M_0 and P : $\vec{r}_0 = \vec{OM}_0$; $\vec{r} = \vec{OP}$

Таким образом, рассматриваемая эллиптическая труба имеет сечение, ограниченное с внутренней стороны базовым эллипсом (кривая L_1 , рис. 1), а с внешней стороны – эвольвентой эволюты базового эллипса. Толщина S стенки предполагается постоянной по периметру сечения. При этом каждая точка сечения внешней поверхности эллиптической стенки (эвольвента L_2 , рис. 1) находится на одном расстоянии в направлении соответствующей нормали M_0M к базовому эллипсу (кривая L_1 , рис. 1). Данная модель геометрии сечения эллиптической стенки соответствует возможной технологии изготовления эллиптических труб равной толщины методом прокатки листа на оправке эллиптического сечения.

При решении задачи используются декартова система координат $(OXYZ)$ с базисом $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ось Z которой направлена вдоль оси трубы, и специальная система координат. При введенных предположениях задачу можно считать плоской и имеющей симметрию относительно осей OX и OY . Поэтому рассматривается четверть сечения трубы в первом квадранте декартовой системы координат $OXYZ$ с базисом $(\vec{i}, \vec{j})$. Пусть, соответственно, a и b – большая и меньшая полуоси базового эллипса (рис. 1, кривая L_1); $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка базового эллипса; M_0M – нормаль к эллипсу в точке M_0 ; $P \in M_0M$ – произвольная точка нормали с координатами (x_p, y_p) ; $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ – радиусы-векторы точек M_0 и M ; $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении нормали M_0M ; φ и ψ – углы, образованные, соответственно, радиусами-векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ с осью OX ; ω – угол, образованный нормалью M_0M с осью OX ; s – длина вектора $\vec{M_0P}$ ($0 \leq s \leq S$).

Угол наклона касательной ω находится через угол φ (рис. 1) с использованием углового коэффициента нормали к эллипсу [1] в виде

$$\operatorname{tg} \omega = (a/b) \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

Результаты и их обсуждение

При введенных обозначениях вектор-радиус $\vec{r}$ произвольной точки нормали $P(x_p, y_p)$ может быть представлен в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s \cdot \vec{n}, \quad (2)$$

где единичный вектор в направлении нормали $\vec{n}$ является функцией угла φ и равен

$$\vec{n}(\varphi) = \vec{i} \cos \omega + \vec{j} \sin \omega. \quad (3)$$

Используя тригонометрические выражения для $\cos \omega$ и $\sin \omega$ через $\operatorname{tg} \omega$, из (1), (2) и (3) можно получить выражение для вектора-радиуса $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{i} \left[a \cos \varphi + \frac{sb \cos \varphi}{\rho} \right] + \vec{j} \left[b \sin \varphi + \frac{sa \sin \varphi}{\rho} \right], \quad (4)$$

где

$$\rho = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}. \quad (5)$$

Из приведенных соотношений следует, что положение произвольной точки области сечения $P(x_p, y_p)$ однозначно определяется углом φ и расстоянием s , отсчитываемым от точки M_0 в направлении нормали M_0M . Линия L_2 , ограничивающая область сечения с внешней стороны (рис. 1), является координатной линией и имеет уравнение $s = S$. Следует отметить, линия L_2 не является эллипсом.

Для построения двумерного уравнения теплопроводности вводится система координат (φ, s) , в которой вектор-радиус $\vec{r}$ произвольной точки определяется (4). Координатными линиями в системе (φ, s) являются: $\varphi = \text{const}$ – определяют положение нормали в точке M_0 базового эллипса; $s = \text{const}$ являются координатными линиями в рассматриваемой области, равноудаленными от базового эллипса. При этом значению $s = 0$ соответствует линия базового эллипса L_1 , то есть внутренняя граница рассматриваемой области. Значению $s = S$ соответствует внешняя граница области L_2 (рис. 1). В принятой постановке задачи функция температуры есть функция координат (φ, s) : $u = u(\varphi, s)$. Ко- и контравариантные векторы базиса $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$, $(\vec{r}^1, \vec{r}^2, \vec{r}^3)$ введенной системы координат (φ, s) находятся из (4) в виде

$$\vec{r}_1 = \vec{i} \left[-a \sin \varphi - \frac{sa^2 b \sin \varphi}{\rho^3} \right] + \vec{j} \left[b \cos \varphi + \frac{sab^2 \cos \varphi}{\rho^3} \right];$$

$$\vec{r}^1 = -\frac{\rho a \sin \varphi}{\rho^3 + sab} \vec{i} + \frac{\rho b \cos \varphi}{\rho^3 + sab} \vec{j}; \quad (6)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{i} \left[\frac{b \cos \varphi}{\rho} \right] + \vec{j} \left[\frac{a \sin \varphi}{\rho} \right]; \quad (7)$$

$$\vec{r}^2 = \frac{b \cos \varphi}{\rho} \vec{i} + \frac{a \sin \varphi}{\rho} \vec{j};$$

$$\vec{r}^3 = \vec{r}_3 = \vec{k}. \quad (8)$$

Из (6) и (7) находятся скалярные произведения ковариантных векторов базиса:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0; \quad \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3 = 0; \quad \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3 = 0; \quad (9)$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 = \left[\rho + sab/\rho^2 \right]^2; \quad \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 = 1; \quad \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_3 = 1. \quad (10)$$

Из (8) и (9) следует, что введенная система координат (φ, s) является ортогональной. При этом на

основании (8), (9) и (5) коэффициенты Ляме [2] H_1, H_2, H_3 системы координат (φ, s) равны:

$$H_1 = \rho + \frac{sab}{\rho^2}; \quad H_2 = H_3 = 1. \quad (11)$$

Из (6), (7) и (11) следуют соотношения, связывающие векторы ко- и контравариантных базисов, а также вид оператора Гамильтона:

$$\vec{r}^1 = \frac{1}{H_1^2} \cdot \vec{r}_1; \quad \vec{r}^2 = \vec{r}_2; \quad \vec{r}^3 = \vec{r}_3 = \vec{k};$$

$$\bar{\nabla} = \vec{r}^1 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{r}^2 \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{H_1^2} \vec{r}_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{r}_2 \frac{\partial}{\partial s}.$$

При решении задачи предполагается, что коэффициент теплопроводности материала трубы – величина постоянная, а внутренние источники тепла отсутствуют. Тогда с учетом (11) можно записать уравнение теплопроводности $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} u = 0$ (уравнение Лапласа) относительно функции температуры $u = u(\varphi, s)$ в системе координат (φ, s) в виде [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + H_1 \frac{\partial H_1}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + H_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0. \quad (12)$$

Используя выражение для ρ (5) и (11), (12) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + R(\varphi, s) \frac{\partial u}{\partial \varphi} + Q(\varphi, s) \frac{\partial u}{\partial s} + P(\varphi, s) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0, \quad (13)$$

где переменные коэффициенты определяются равенствами

$$R(\varphi, s) = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} = -\frac{a^2 - b^2}{2\rho^2} \frac{\rho^3 - 2sab}{\rho^3 + sab} \sin 2\varphi;$$

$$Q(\varphi, s) = H_1 \frac{\partial H_1}{\partial s} = \frac{ab(\rho^3 + sab)}{\rho^4}; \quad (14)$$

$$P(\varphi, s) = H_1^2 = \frac{(\rho^3 + sab)^2}{\rho^4}.$$

Граничные условия

Случай 1. Для полного сечения эллиптической трубы граничные условия первого рода на внутренней $s = 0$ и внешней $s = S$ поверхности имеют вид

$$u(\varphi, 0) = f_1(\varphi) \quad \text{при } s = 0; \quad (15)$$

$$u(\varphi, S) = f_2(\varphi) \quad \text{при } s = S. \quad (16)$$

В (15) и (16) граничные функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ в области $\varphi \in [0, 2\pi]$ периодические, непрерывные и трижды непрерывно дифференцируемые.

Для четверти сечения трубы $\varphi \in [0, \pi/2]$, рассматриваемой в силу симметрии как часть полной трубы, граничные условия первого рода имеют вид

$$\frac{\partial u(\varphi, s)}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0; \quad \frac{\partial u(\varphi, s)}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = \pi/2; \quad (17)$$

$$u(\varphi, 0) = f_1(\varphi) \text{ при } s = 0; \quad u(\varphi, S) = f_2(\varphi) \text{ при } s = S. \quad (18)$$

В граничных условиях (17) и (18) функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ определены и трижды непрерывно дифференцируемы на отрезке $\varphi \in [0, \pi/2]$.

Случай 2. Для четверти сечения трубы, как отдельной панели эллиптической трубы, граничные условия первого рода имеют вид

$$u(\varphi, s) = g_1(s) \text{ при } \varphi = 0; \quad u(\varphi, s) = g_2(s) \text{ при } \varphi = \pi/2; \quad (19)$$

$$u(\varphi, 0) = f_1(\varphi) \text{ при } s = 0; \quad u(\varphi, S) = f_2(\varphi) \text{ при } s = S. \quad (20)$$

В граничных условиях (19) и (20) функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ определены и трижды непрерывно дифференцируемы на отрезке $\varphi \in [0, \pi/2]$; функции $g_1(s)$ и $g_2(s)$ определены и трижды непрерывно дифференцируемы на отрезке $s \in [0, S]$.

Таким образом, решение задачи расчета стационарного поля температур в стенке эллиптической трубы сведено к решению линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (13) при граничных условиях (15)–(16) для полного сечения трубы, условиях (17)–(18) для четверти сечения трубы как части полного сечения, условиях (19)–(20) для отдельной панели эллиптической трубы соответственно.

Построение приближенных численных решений (13) при граничных условиях (19)–(20) может быть проведено различными методами. Применение стандартной процедуры метода конечных разностей [3] позволяет для (13) построить шаблонное уравнение вида

$$u_{i+1,j}F_{ij} + u_{ij}G_{ij} + u_{i-1,j}M_{ij} + u_{i,j+1}N_{ij} + u_{i,j-1}S_{ij} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, N_\varphi; j = 2, 3, \dots, N_s), \quad (21)$$

где узловые значения коэффициентов, с учетом (14), определяются равенствами

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \left[\frac{1}{h_{\varphi(i,j)}^2} + \frac{R_{ij}}{2h_{\varphi(i,j)}} \right]; \quad G_{ij} = \left[-\frac{2}{h_{\varphi(i,j)}^2} - \frac{2P_{ij}}{h_s^2} \right]; \\ M_{ij} &= \left[\frac{1}{h_{\varphi(i,j)}^2} - \frac{R_{ij}}{2h_{\varphi(i,j)}} \right]; \quad N_{ij} = \left[\frac{Q_{ij}}{2h_s} + \frac{P_{ij}}{h_s^2} \right]; \\ S_{ij} &= \left[-\frac{Q_{ij}}{2h_s} + \frac{P_{ij}}{h_s^2} \right]; \quad (i = 1, 2, \dots, N_\varphi + 1; j = 1, 2, \dots, N_s + 1). \end{aligned} \quad (22)$$

В настоящей работе для построения приближенных решений (13) используется вариационный метод Ритца [5-7]. Учитывая вид оператора Гамильтона в векторном базисе $(\bar{r}^1, \bar{r}^2, \bar{r}^3)$, можно установить, что решение (12) эквивалентно нахождению точки минимума функционала $I(u)$ [5]:

$$I(u) = \int_{\Omega} (\bar{\nabla} u \cdot \bar{\nabla} u) d\omega = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{H_1^2} (\partial u / \partial \varphi)^2 + (\partial u / \partial s)^2 \right] d\omega, \quad (23)$$

где интегрирование проводится по двумерной области $\Omega \{0 \leq \varphi \leq \pi/2; 0 \leq s \leq S\}$, в которой находится решение (12); $d\omega = H_1(\varphi, s) d\varphi ds$ – элемент площади области Ω [2]. Учитывая симметрию, рассматривалось решение (12) для четверти сечения трубы при граничных условиях (17)–(18). Следуя методу Ритца [5-6], приближение искомой функции $u(\varphi, s)$ принималось в виде

$$u(\varphi, s) = U_0(\varphi, s) + \sum_{i=1}^n \alpha_i U_i(\varphi, s), \quad (24)$$

где функция $U_0(\varphi, s)$ удовлетворяет граничным условиям (18); функции $U_i(\varphi, s)$ удовлетворяют граничным условиям (17); α_i – подлежащие определению коэффициенты. Ограничиваясь в качестве примера двумя членами ряда в (24) и учитывая условия, налагаемые на функции $U_0(\varphi, s)$ и $U_i(\varphi, s)$, было рассмотрено приближение для функции $u(\varphi, s)$ вида

$$u(\varphi, s) = \left[\frac{s}{S} f_2(\varphi) + \left(1 - \frac{s}{S} \right) f_1(\varphi) \right] + a_1 \left[\varphi^2 (\pi/2 - \varphi)^2 \eta(s) \right] + a_2 \left[\varphi^3 (\pi/2 - \varphi)^3 \eta^2(s) \right], \quad (25)$$

где $\eta(s) = (s/S)(1 - s/S)$. Вариативная часть функции $u(\varphi, s)$ (25) в развернутом виде представляет собой полином относительно переменных φ и s вида $\varphi^n \cdot \tilde{s}^k$ ($\tilde{s} = s/S; n, k = 1, 2, \dots$). Доказательство полноты системы функций $\varphi^n \cdot \tilde{s}^k$ [5-6] и сходимость ряда (25) к решению, представляющие собой отдельную задачу, в настоящей работе не рассматривались. Определяя из (25) производные $\partial u / \partial \varphi$, $\partial u / \partial s$ и подставляя в (23), находим вид функционала $I(u)$:

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{H_1^2} (\partial u / \partial \varphi)^2 + (\partial u / \partial s)^2 \right] d\omega = \\ &= \int_{\Omega} \Psi_0(\varphi, s) d\omega + a_1^2 \int_{\Omega} \Psi_1(\varphi, s) d\omega + a_2^2 \int_{\Omega} \Psi_2(\varphi, s) d\omega + \\ &+ a_1 \int_{\Omega} \Psi_3(\varphi, s) d\omega + a_2 \int_{\Omega} \Psi_4(\varphi, s) d\omega + a_1 a_2 \int_{\Omega} \Psi_5(\varphi, s) d\omega. \end{aligned} \quad (26)$$

В (26):

$$\begin{aligned}
\Psi_0(\varphi, s) &= (1/H_1^2)(\partial u/\partial \varphi)^2 + (\partial u/\partial s)^2; \\
\Psi_1(\varphi, s) &= (4/H_1^2)T_1^2 + V_1^2; \\
\Psi_2(\varphi, s) &= (9/H_1^2)T_2^2 + 4V_2^2; \\
\Psi_3(\varphi, s) &= (4/H_1^2)(\partial U_0/\partial \varphi)T_1 + 2(\partial U_0/\partial s)V_1; \\
\Psi_4(\varphi, s) &= (6/H_1^2)(\partial U_0/\partial \varphi)T_2 + 4(\partial U_0/\partial s)V_2; \\
\Psi_5(\varphi, s) &= (12/H_1^2)T_1T_2 + 4V_1V_2; \\
U_0(\varphi, s) &= (s/S)f_2(\varphi) + (1-s/S)f_1(\varphi). \quad (27)
\end{aligned}$$

В (27) функции $T_1(\varphi, s)$, $T_2(\varphi, s)$, $V_1(\varphi, s)$, $V_2(\varphi, s)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}
T_1(\varphi, s) &= \varphi[(\pi/2) - \varphi][(\pi/2) - 2\varphi]\eta(s); \\
T_2(\varphi, s) &= \varphi^2[(\pi/2) - \varphi]^2[(\pi/2) - 2\varphi]\eta^2(s); \\
V_1(\varphi, s) &= \varphi^2[(\pi/2) - \varphi]^2(d\eta/ds); \\
V_2(\varphi, s) &= \varphi^3[(\pi/2) - \varphi]^3\eta(s)(d\eta/ds). \quad (28)
\end{aligned}$$

Аналитическое вычисление интегралов в (26), с учетом вида коэффициента Ляме $H_1 = \rho + (sab/\rho^2)$ и (27), достаточно проблематично, поэтому использовался численный метод определения интегралов. С этой целью область $\Omega\{0 \leq \varphi \leq \pi/2; 0 \leq s \leq S\}$ разбивается на множество попарно не пересекающихся элементов $\Omega_\alpha\{\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}; s_j \leq s \leq s_{j+1}\}$ системой узлов $(\varphi_i; s_j)$, где α – номер элемента и $\alpha = 1, 2, \dots, N_\varphi N_s$; N_j – число интервалов разбиения по углу φ с шагом $\Delta\varphi = \pi/2N_\varphi$; N_s – число интервалов разбиения по координате s с шагом $h_s = S/N_s$. При этом значения интегралов в (26) приближенно принимались равными суммам значений интегралов по каждому элементу Ω_α . Например, для функции $\Psi_3(\varphi, s)$

$$\int_{\Omega} \Psi_3(\varphi, s) d\omega \approx \sum_{\alpha=1}^{N_\varphi N_s} \int_{\Omega_\alpha} \Psi_3(\varphi, s) d\omega_\alpha. \quad (29)$$

Далее значения подынтегральных функций на элементе Ω_α в (29) аппроксимировались средним значением функции $\Psi_3(\varphi, s)$ в узлах элемента. При этом приближенное значение интеграла на элементе Ω_α равно

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\alpha} \Psi_3(\varphi, s) d\omega_\alpha \approx \frac{1}{4} \times \\
&\times \int_{\Omega_\alpha} [\Psi_3(\varphi_i, s_j) + \Psi_3(\varphi_{i+1}, s_j) + \Psi_3(\varphi_i, s_{j+1}) + \Psi_3(\varphi_{i+1}, s_{j+1})] d\omega_\alpha, \quad (30)
\end{aligned}$$

а приближенное значение элемента площади в выбранной системе координат равно [2]

$$d\omega_\alpha = H_1 d\varphi ds \approx \frac{1}{2} [H_1(\varphi_i, s_j) + H_1(\varphi_i, s_{j+1})] \Delta\varphi \cdot h_s. \quad (31)$$

В качестве первого примера применения изложенной методики рассматривалась эллиптическая труба с размерами: $a = 4$; $b = 2$; $S = 1$; $N_j = 20$; $N_s = 5$ и граничными функциями вида

$$\begin{aligned}
f_1(\varphi) &= 10 - 3\cos(2\varphi) + 2\cos(4\varphi); \\
f_2(\varphi) &= 15 + 5\cos(2\varphi) - 4\cos(4\varphi). \quad (32)
\end{aligned}$$

Данные функции можно рассматривать как первые слагаемые рядов Фурье, в которые могут быть разложены граничные функции более общего вида. Функции (32) имеют производные, равные нулю на границах интервала $\varphi \in [0, \pi/2]$, что соответствует (17). Для данного примера $\Delta\varphi = \pi/(2N_\varphi) = 0,0785$; $h_s = S/N_s = 0,2$, число элементов равно $N_\varphi N_s = 100$. Для принятых численных значений параметров задачи функционал $I(u)$ (26) имеет вид

$$\begin{aligned}
I(u) &= I_0 + 0,121321a_1^2 + 0,00202a_2^2 + (-0,8702)a_1 + \\
&+ (-0,06868)a_2 + 0,02061a_1a_2. \quad (33)
\end{aligned}$$

В соответствии с методом Ритца [5, 6] дифференцирование функционала (33) по a_1 и a_2 дает систему двух линейных уравнений относительно этих коэффициентов, имеющую решение

$$a_1 = 6,3294; \quad a_2 = -2,2859. \quad (34)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (25), находим вид приближенного решения (12):

$$\begin{aligned}
u(\varphi, s) &= [(s/S)f_2(\varphi) + (1-s/S)f_1(\varphi)] + \\
&+ 6,3294\varphi^2(\pi/2 - \varphi)^2[(s/S)(1-s/S)] - \\
&- 2,2859\varphi^3(\pi/2 - \varphi)^3[(s/S)(1-s/S)]^2. \quad (35)
\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно установить, что построенная функция $u = u(\varphi, s)$ не имеет экстремума в рассматриваемой области, что соответствует теореме о максимуме гармонической функции [2, 5].

Вид разверток сечений поверхности функции температуры $u = u(\varphi, s)$ по углу φ , для $s = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$ и $\varphi = \varphi_i (i = 1, 2, \dots, 21)$ приведен на рис. 2. Для $s = 0$ и $s = 1$ сечения поверхности $u = u(j, s)$ представляют собой, соответственно, граничные функции $f_1(j)$ и $f_2(j)$. Следует отметить, что секущие координатные поверхности $s = \text{const}$ не являются плоскостями. Поэтому точки близких значений температур кривых на рис. 2 ($\varphi \approx 1,1781$) имеют различные значения полярного угла ψ для различных точек и не

совпадают на физической плоскости OXY рис. 1. Значение полярного угла ψ определяется формулой

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{s \sin \omega + \rho \sin \varphi}{s \cos \omega + \rho \cos \varphi}. \quad (36)$$

В качестве второго примера применения изложенной методики рассматривалась эллиптическая труба с размерами: $a = 4$; $b = 2$; $S = 1$; $N_j = 20$; $N_s = 5$ и граничными функциями, принимающими постоянные значения при $s = 0$ и $s = S$, соответственно:

$$f_1(\varphi) = 20; f_2(\varphi) = 5. \quad (37)$$

Из равенств (37) и формулы (25) следует, что на границах области $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ функция температуры $u = u(\varphi, s)$ линейна по переменной s .

Рис. 2. Вид разверток сечений поверхности функции температуры $u = u(\varphi, s)$ по углу φ , для $s = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0$ и $\varphi = \varphi_i (i = 1, 2, \dots, 21)$
Fig. 2. Type of scans of surface sections of function of temperature $u = u(\varphi, s)$ for a corner φ , for $s = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0$ and $\varphi = \varphi_i (i = 1, 2, \dots, 21)$

Для принятых численных значений параметров задачи и граничных функций (37) функционал $I(u)$ (26) имеет вид

$$I(u) = I_0 + 0,121321a_1^2 + 0,00202a_2^2 + 1,4392a_1 + 0,12515a_2 + 0,02061a_1a_2. \quad (38)$$

В соответствии с используемым методом Ритца из условия минимума функционала (37) находятся значения варьируемых коэффициентов:

$$a_1 = -5,8237; a_2 = -1,2693. \quad (39)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов (39) в (25), находим вид приближенного решения (12) при граничных функциях (37):

$$u(\varphi, s) = [5s/S + 20(1-s/S)] - 5,8237\varphi^2(\pi/2 - \varphi)^2[(s/S)(1-s/S)] - 1,2693\varphi^3(\pi/2 - \varphi)^3[(s/S)(1-s/S)]^2. \quad (40)$$

Вид развертки сечения поверхности функции температуры, $u = u(\varphi, s)$ (40) по углу φ , для $s = 0,4$ и $\varphi = \varphi_i (i = 1, 2, \dots, 21)$ приведен на рис. 3.

Рис. 3. Вид разверток сечений поверхности температуры $u = u(\varphi, s)$ координатными поверхностями $\varphi = 0; 0.63; 1.26; 1.57$
Fig. 3. Type of scans of sections of the surface temperature $u = u(\varphi, s)$ of the coordinate surfaces $\varphi = 0; 0.63; 1.26; 1.57$

Более общий вид квадратичного функционала, минимум которого позволяет обеспечить одновременное выполнение уравнения теплопроводности с внутренними источниками тепла и граничных условий первого, второго и третьего рода на отдельных участках внешней поверхности тела, имеет вид [5-7]

$$I(u) = \int_V [\bar{\nabla}(u) \cdot \bar{\nabla}(u) - 2\psi(q^i)u] dv + \int_{\Sigma} [2uf(q^i) + u^2g(q^i)] d\sigma, \quad (41)$$

где V – рассматриваемый объем тела, ограниченный кусочно-гладкой поверхностью Σ ; $q^i (i = 1, 2, 3)$ – используемая криволинейная система координат; $\psi(q^i)$ – мощность внутренних источников тепла в стенке трубы; $f(q^i)$ и $g(q^i)$ – заданные на элементах поверхности трубы функции.

Заключение

Рассмотрен вариант приближенного построения решения стационарного уравнения теплопроводности при отсутствии внутренних источников тепла в стенке эллиптического сечения постоянной толщины вариационным методом. В качестве примера использования предложенной расчетной схемы получены решения при граничных условиях первого рода. Предложенный подход позволяет проводить приближенный расчет полей температур и тепловых потоков при нагреве в заготовках и поковках при изготовлении труб эллиптического сечения постоянной толщины и корпусов задвижек высокого давления эллипсоидальной формы.

Список литературы

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Изд. Физ.-мат. литературы, 1962. Т. 2.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
4. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970.
5. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.
6. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. Изд. 2-е. М.: Гос. Изд-во технико-теоретической лит-ры, 1958.
7. Шехтер Р.С. Вариационный метод в инженерных расчетах. М.: Мир, 1971.

References

1. Aleksandrov P.S. Lekcii po analitičeskoj geometrii. M.: Nauka, 1968.
2. Smirnov V.I. Kurs vysšej matematiki. M.: Izd. Fiz.-mat. literatury, 1962. T. 2.
3. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniâ matematičeskoj fiziki. M.: Nauka, 1966.
4. Arfken G. Matematičeskie metody v fizike. M.: Atomizdat, 1970.
5. Mihlin S.G. Čislennaâ realizaciâ variacionnyh metodov. M.: Nauka, 1966.
6. Èl'sgol'c L.È. Variacionnoe isčislenie. Izd. 2-e. M.: Gos. Izd-vo tehniko-teoretičeskoj lit-ry, 1958.
7. Šehter R.S. Variacionnyj metod v inženernyh rasčetah. M.: Mir, 1971.

Транслитерация по ISO 9:1995